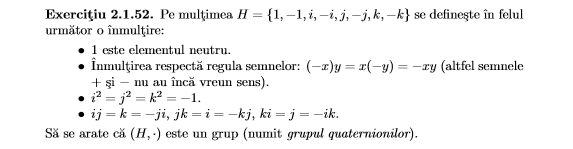
**Ex 2.1.52**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \* | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| 1 | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| -1 | -1 | 1 | -i | i | -j | j | k | k |
| i | i | -i | -1 | 1 | k | -k | -j | j |
| -i | -i | i | 1 | -1 | -k | k | j | -j |
| j | j | -i | -k | k | -1 | 1 | i | -i |
| -j | -j | j | k | -k | 1 | -1 | -i | I |
| k | k | -k | j | -j | -i | i | -1 | 1 |
| -k | -k | k | -j | j | i | -i | 1 | -1 |

(-1) \* (-1) = 1

(-1) \* i = 1 \* (-i) = - (1\*i) = -i identic pentru (-1) \* j , (-1) \* k

(-1) \* (-i) = + (1\*i) = i identic pentru (-1)\*(-j) , (-1) \* (-k)

i \* (-1) = (-i) \* 1 = - (i\*1) = -i , identic pentru j\*(-1), k \*(-1)

i \*(-i) = (-i) \* i = - (i\*i) = -(-1) = 1

(-i) \* i = i \* (-i) = - (i\*i) = -(-1) = 1

i\*(-j) = (-i) \* j = -(i\*j) = (-k) (ip)

(-j) \* i = j \* (-i) = - (j \* i) = k (ip)

i \* k = -j (din relatia de mai jos)

i \* (-k) = (-i) \* k = j (din ip) = -(i\*k)

(-i) \* (-1) = + (i \* 1) = i

identic (-j) \* (-1) , (-k) \*(-1)

(-i)\*(-i) = +(i\*i) = -1

(-i) \* j = i \* (-j) = -(i\*j) = -k

(-i) \* (-j) = i\*j = k

(-i) \* (-k) = i\*k = - (-i\*k) = -(j) = -j

j \*i = -( -(j\*i)) = - ( (-j) \* i) = - (k) = -k

j\*(-i) = (-j)\*i = k

j \* (-k) = (-j)\*k = - (j\*k) = - (i) = -i

(-j) \* (-i) = j\*i = - ( -(j\*i) ) = - ( (-j) \* i) = - (k) = -k

(-j) \* k = -(j\*k) = -i

(-j)\* (-k) = j\*k = i

k\*(-i) = (-k) \* i = - (k\*i) = - (j) = -j

k \* j = - (- (k\*j)) = - ( (-k) \* j) = - (i) = -i

k \* (-j) = (-k) \* j = i

(-k) \* i = k \* (-i) = - (k\*i) = -(j) = -j

(-k) \* (-i) = k\*i = j

(-k) \* (-j) = k\*j = - ( - (k\*j)) = - ( (-k) \* j ) = - (i) = -i

(H,\*) – Grup cu ajutorul Tablei lui Cayley

1. asociativitate

Fie a,b,c H => (a \* b) \* c = a \* (b \* c)

https://en.wikipedia.org/wiki/Light%27s\_associativity\_test

1. element neutru

1 este element neutru (din ip)

1. toate elementele sunt inversabile

1-1=1

(-1)-1= -1

i-1=-i

(-i)-1=i

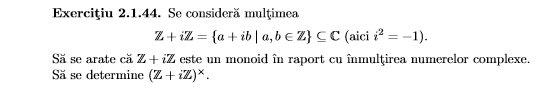
j-1=-j

(-j)-1 = j

k-1= -k

(-k)-1= k

**Ex 2.1.44**



Z + iZ = { a + ib | a,b Z}

Z + iZ, \* Monoid

1. Parte stabila

fie z = a +ib a,b Z

w = c + id c,d Z

z \* w = (a + ib)\*(c + id) = ac + i ad + i bc + i2 bd =

ac – bd + i ( ad + bc) = u + i v

u = ac – bdZ din cauza ca a,b,c,d Z

v = ad + bc Z din cauza ca a,b,c,d Z

* operatia este bine definita

1. asociativitate

* fie z,w,v => (z\*w) \* v = z \* ( w \* v) (Adevarat, inmultirea uzuala este asociativa, mostenita de la monoidul R + iR)

2\*) se observa ca operatia este comutativa, inmultirea uzuala fiind comutativa pe R + iR

3)Element neutru, fie e = c + i d

=> z \* e = e \* z = z

fie z = a + ib

consideram ecuatia z \* e = z

(a + ib)\*(c + id) = ac + i ad + i bc + i2 bd = (ac – bd) + i (ad + bc) = a + ib

de unde avem sistemul cu necunoscutele c si d

ac – bd = a => a(c-1) = bd

ad + bc = b => b(c-1) = -ad

(c-1)(a+b) = d ( b-a) => c-1 = 0 si d = 0

a,b => c = 1 si d = 0

* e = 1 + i \* 0

fie z = e

consideram ecuatia e \* e = e

( c + id)2 = c + id => (c+id) ( c + id – 1) = 0 =>

(c + id ) ( (c-1) + id) = 0

* Caz 1

c + id = 0 + i \* 0 => c = 0 si d = 0 => e1 = 0 + i 0

fie z din Zx iZ , z \* e = z \* 0 = 0

(nu verifica prop de element neutru)

* Caz 2

(c-1) + id = 0 + i \* 0=> egalitatea nr complexe

c – 1 = 0 =>c = 1

d = 0

* e = 1 + i \* 0 verifica

z\*(1+ i\*0) = (1 + i \* 0) \* z = z

din 1) 2\*) si 3) => Z + iZ monoid comutativ in rap cu inmultirea nr complexe

(Z+iZ)x = Multimea elementelor inversabile

Fie z , z inversabil => exista z-1 a.i z \* z-1= z-1 \* z = 1

Consideram ecuatia z \* z-1 = e = 1

fie z = (a + ib) , z-1 = c + i d

z \* z-1 = 1 ⬄ (ac – bd) + i (ad + bc) = 1 + i \* 0

* sistemul cu necunoscutele c si d

ac – bd = 1 => ac – bd = 1

ad + bc = 0 => bc + ad = 0

M =

det(M) = a2+b2 ≠ 0 dsnd a ≠ 0 si b ≠ 0

c =

d =

c,d => a2+b2=1 =>

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 0 | 0 | 1 | -1 |
| b | 1 | -1 | 0 | 0 |

Elementele inversabile din monoid sunt sunt: 0+ i \*1 , 0 + i \*(-1), 1 + i\*0, -1 + i\*0 ⬄i, -i, 1, -1

**2.1.46**



#: RxR -> R

x # y = xy – 5x – 5y + 30 =xy -5x – 5y +25 + 5 = x(y-5) -5 (y – 5) + 5 = (x-5)(y-5) + 5

1. Este (R,#) grup

1) Parte stabila

1. asociativitate: Fie x,y,z

(x#y)#z = x#(y#z)

Ms: ( (x-5)(y-5) + 5) # z = ( (x-5)(y-5)+5 -5)(z-5) + 5 = (x-5)(y-5)(z-5) + 5

Md: (x-5)(y#z – 5) + 5 = (x-5)((y-5)(z-5)+5-5)+5 = (x-5)(y-5)(z-5) + 5

Ms = Md => # este asociativa

1. element neutru

Fie

Se observa ca # este comutativa din cauza ca inmultirea uzuala este computativa pe R

Pastram ecuatia x # e = x => (x-5)(e-5) + 5 = x => (x-5)(e-5) – ( x -5 )= 0 => (x-5)(e-5-1) = 0

(x-5)(e-6) = 0 Pentru ca egalitatea are loc pentru orice x din R, se impune e – 6 = 0 => e = 6

1. elemente inversabile

Fie x

x # = 6 => (x-5)(-5) + 5 = 6 => (x-5)(-5) = 1

Cazul 1

Cazul 2

din 1) 2) 3) si 4) => (R, #) nu este grup deoarece nu toate elementele sunt inversabile

**(R-{5), #) este grup**

1. Parte stabila: fie x,y din R – {5} => x#y aprtine R-{5}

pp x#y = 5 => (x-5)(y-5) + 5 = 5 => (x-5)(y-5) = 0 => x – 5 = 0 sau y-5 = 0 =>

x = 5 sau y = 5, dar x,y sunt din R – {5} => parte stabila

1. asociativitatea se pastreaza
2. elementrul neutru e = 6 apartine R-{5}
3. x’ = care apartine R \ {5} <= Pp x’ = 5 =>

**( (5, ∞), #) este grup**

1. Partea stabila x > 5 si y >5 => (x-5)(y-5) > 0 => (x-5)(y-5)+5> 5 => x#y > 5 => (5, ∞) infinit
2. Asociativitatea se pastreaza
3. e = 6 apartine multimii (5, ∞)
4. x’ = > 5 ( x > 5 => x-5 > 0 => > 0 => )

( -∞, 5) nu este grup deoarece elementul neutru e = 6 nu apartine multimii